



TITLE:

テータ函数と無限階微分方程式系 (テータ関数とその周辺)

AUTHOR(S):

河合, 隆裕

CITATION:

河合, 隆裕. テータ函数と無限階微分方程式系(テータ関数とその周辺).
数理解析研究所講究録 1986, 597: 134-138

ISSUE DATE:

1986-09

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/99558>

RIGHT:

テータ函数と無限階微分方程式系

京都大学 数理解析研究所
河合隆裕

無限階微分方程式系は解析的に取扱うにくい
代物ではあるが、それだけに興味深い対象である。
また、一次元の場合では（有限階の場合とは異なり）
単独方程式と考えるのでは解空間が無限次元に
なってしまうから、という理由により、まず手始めとして
定数係数の系と一次元の場合に考えるのは賢明では
ないと考える：事態が退化して難しくなる過ぎるからで
ある。[この付近の話題に就いての議論は別の機会に譲ら
度い。] 実際

Sato, M., M. Kashiwara and T. Kawai: Microlocal
analysis of theta functions. Adv. Studies
in Pure Math. 4 (1984), 267-289

の主題である \mathbb{R} -holonomic 系は本質的に

変数係数であり乍ら、解空間の有限次元性、

Reconstruction theorem 等の良い性質を持って

いる。本講演では、 \mathbb{R} -holonomic 系の最も簡単

な例である、佐藤先生により見出たこと、 θ -zero value

を満たす方程式系、即ち

$$(1) [\exp P_j - 1] f(t) = 0 \quad (j=1, 2)$$

とし

$$(2) \quad P_1 = \begin{bmatrix} 0 & t \\ 4\pi i (t \frac{d}{dt} + \frac{1}{2}) & 0 \end{bmatrix}$$

$$(3) \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4\pi i \frac{d}{dt} & 0 \end{bmatrix}$$

を題材に、このように純粹に局所的な条件

のみから、 θ -zero value の虚変換に関する大域的

な結果を導き出せることを示し, "IR-holonomic系
により函数を統制できる" と言うスロ-ガンと立証
することを試みた. その議論の大筋は次の通り:

$t \mapsto s = -1/t$ と言う座標変換を行い, P_j を s -
座標で書き下したものを \tilde{P}_j とすれば, $S = \begin{bmatrix} s^{1/2} & 0 \\ 0 & s^{3/2} \end{bmatrix}$
と

$$S^{-1} \tilde{P}_1 S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -4\pi i \frac{d}{ds} & 0 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} \tilde{P}_2 S = \begin{bmatrix} 0 & \Delta \\ 4\pi i (s \frac{d}{ds} + \frac{1}{2}) & 0 \end{bmatrix}$$

故, (1) より

$$(4) \begin{cases} \exp(-P_2) S^{-1} f(-1/s) = S^{-1} f(-1/s) \\ \exp(P_1) S^{-1} f(-1/s) = S^{-1} f(-1/s) \end{cases}$$

を得る. ここで $\exp(-P_2) \exp(P_2) = 1$ に

注意すれば、(4)は

$$(5) \quad (\exp P_j - 1) S^{-1} f(-1/s) = 0, \quad j=1, 2$$

と同値である。ここで方程式系(1)の正則解の空間の次元が $(\{ \operatorname{Im} s > 0 \} = \{ \operatorname{Im} t > 0 \})$ で局所的に

1次元である (T. Kawai, An example of a complex of linear differential operators of infinite order, Proc. Japan Acad., 59 (1983), 113-115) ことより

$$(6) \quad f(s) = C S^{-1} f(-1/s) \quad (C: \text{定数})$$

を得る。ここで

$$f(t) = \begin{bmatrix} \sum_v \exp(\pi i v^2 t) \\ \sum_v 2\pi i v \exp(\pi i v^2 t) \end{bmatrix}$$

が (1) を満たすことより、(6)の第一成分を

$s = i$ とし $C = \exp(\pi i/4)$ を得る。この

ようにして、純粹に局所的な関係式 (1) から 虚変換

に関する大域的な情報か得られたことになる。なお、

ここでは $t \mapsto -1/t$ とする変換を天下う的に

導入したか、この変換自身も、 P_1, P_2 の特殊な

交換関係を用いて

$$\exp\left(-\frac{\pi}{2} \left(\frac{-P^2 + Q^2}{4\pi i} \right)\right)$$

として理解されることも判っている。これに就いては、

上述の S-K-K, Adv. St. in Pure Math. の報文, §2

を参照されたい。